ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 LỚP 9
Quận 6 (2014-2015)

(NGÀY THI: 26/12/2014)

Bài 1: (3 điểm) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh: $\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12)=25x^2$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

Bài 3: (3 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3(x-y) \\ x^2+xy+y^2=7(x-y)^2 \end{cases}$$

Bài 4: (3 điểm) Cho x > 0, y > 0 và $x^2+y^2=1$

Chứng minh : $S=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)\ge 3\sqrt{2}+4$

Bài 5: (3 điểm) Cho a, b là hai số nguyên.

Chứng minh rằng nếu $5(a+b)^2+ab$ chia hết cho 441 thì ab cũng chia hết cho 441.

Bài 6: (4 điểm) Gọi AD là đường phân giác trong góc A của ΔABC (D thuộc đoạn BC). Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N sao cho $ABN=CBM$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp ΔACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABN tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh: BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm: A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $BCF=ACM$. Từ đó suy ra $ACN=BCM$

★ HẾT ★

ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 LỚP 9
Quận 6 (2014-2015)

(NGÀY THI: 26/12/2014)

Bài 1: (3 điểm) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh: $\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3=\left(-\frac{1}{c}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+3\left(\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{1}{c^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+3\left(\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{-1}{c}\right)=\frac{-1}{c^3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc} \Leftrightarrow \frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3}+\frac{abc}{c^3}=3 \Leftrightarrow \frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12)=25x^2$

$(x+4)(x+6)(x-2)(x-12)=25x^2$

$\Leftrightarrow (x^2+10x+24)(x^2-14x+24)=25x^2$

Đặt $t=x^2-2x+24$. Khi đó., phương trình trở thành:

$(t+12x)(t-12x)=25x^2 \Leftrightarrow t^2-144x^2=25x^2 \Leftrightarrow t^2-169x^2=0 \Leftrightarrow (t-13x)(t+13x)=0$

TH 1: $t-13x=0 \Rightarrow x^2-2x+24-13x=0 \Leftrightarrow x^2-15x+24=0 \Leftrightarrow x=\frac{15+\sqrt{129}}{2}$ hay $x=\frac{15-\sqrt{129}}{2}$

TH 2: $t+13x=0 \Rightarrow x^2-2x+24+13x=0 \Leftrightarrow x^2+11x+24=0 \Leftrightarrow x=-3$ hay $x=-8$

Vậy $S=\left\{\frac{15+\sqrt{129}}{2};\frac{15-\sqrt{129}}{2};-3;-8\right\}$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

Điều kiện: $x>\frac{2}{3}$

pt $\Leftrightarrow \frac{x^2-(3x-2)}{\sqrt{3x-2}}=1-x \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=-(x-1)\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x-1)\left(x-2+\sqrt{3x-2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2+\sqrt{3x-2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \sqrt{3x-2}=2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 3x-2=(2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \begin{cases} x\le 2 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy $S=\{1\}$

Bài 3: (3 điểm) **Giải hệ phương trình:**

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x^2 - 2xy + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ (x-2y)(2x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \end{cases} (I) \\ \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I), $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ (2y)^2 - (2y)y + y^2 = 3[(2y) - y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - 2y^2 + y^2 = 3y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải hệ (II), $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 3(x - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x^2 + 4x^2 = -3x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x^2 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Bài 4: (3 điểm) **Cho** $x > 0$, $y > 0$ **và** $x^2 + y^2 = 1$

Chứng minh : $S = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) \ge 3\sqrt{2} + 4$

Ta có :

$$S = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{y} + x + \frac{x}{y} + 1 + \frac{1}{x} + y + \frac{y}{x} = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, cho 2 số dương, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{2}{\sqrt{xy}}$

Ta có: $x^2 + y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow 1 \ge 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \ge 2\sqrt{2}$

Do đó: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge 2\sqrt{2}$

Đến đây, ta dùng điểm rơi Cô-si, như sau:
Do vai trò của x, y là như nhau nên ta dự đoán dấu ''='' xảy ra khi x = y
mà $x^2+y^2=1$ ***nên*** $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Từ đó, ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{x}=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ k\cdot\dfrac{1}{x}=k\sqrt{2} \end{cases}$; cho $k\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

Trình bày tiếp:

$$S=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\ge 2+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{x\cdot\frac{1}{2x}}+2\sqrt{y\cdot\frac{1}{2y}}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}$$

$$=2+2+2.\sqrt{\frac{1}{2}}+2.\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=4+3\sqrt{2}$$

Vậy $S=(1+x)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ge 3\sqrt{2}+4$

<u>Bài 5:</u> (3 điểm) **Cho a, b là hai số nguyên.**
Chứng minh rằng nếu $5(a+b)^2+ab$ **chia hết cho 441 thì ab cũng chia hết cho 441.**

$441=3^2.7^2$; **3 và 7 là các số nguyên tố**

$5(a+b)^2+ab=5(a-b)^2+21ab\vdots 441\Rightarrow 5(a-b)^2+21ab\vdots 3$

$\Rightarrow 5(a-b)^2\vdots 3$ (**vì** $21ab\vdots 3$) $\Rightarrow (a-b)^2\vdots 3\Rightarrow a-b\vdots 3$

$\Rightarrow 5(a-b)^2\vdots 9$ **mà** $5(a-b)^2+21ab\vdots 9$ **nên** $21ab\vdots 9\Rightarrow ab\vdots 3$

Ta có: $a-b\vdots 3$ **và** $ab\vdots 3\Rightarrow a\vdots 3$ **và** $b\vdots 3\Rightarrow ab\vdots 9$

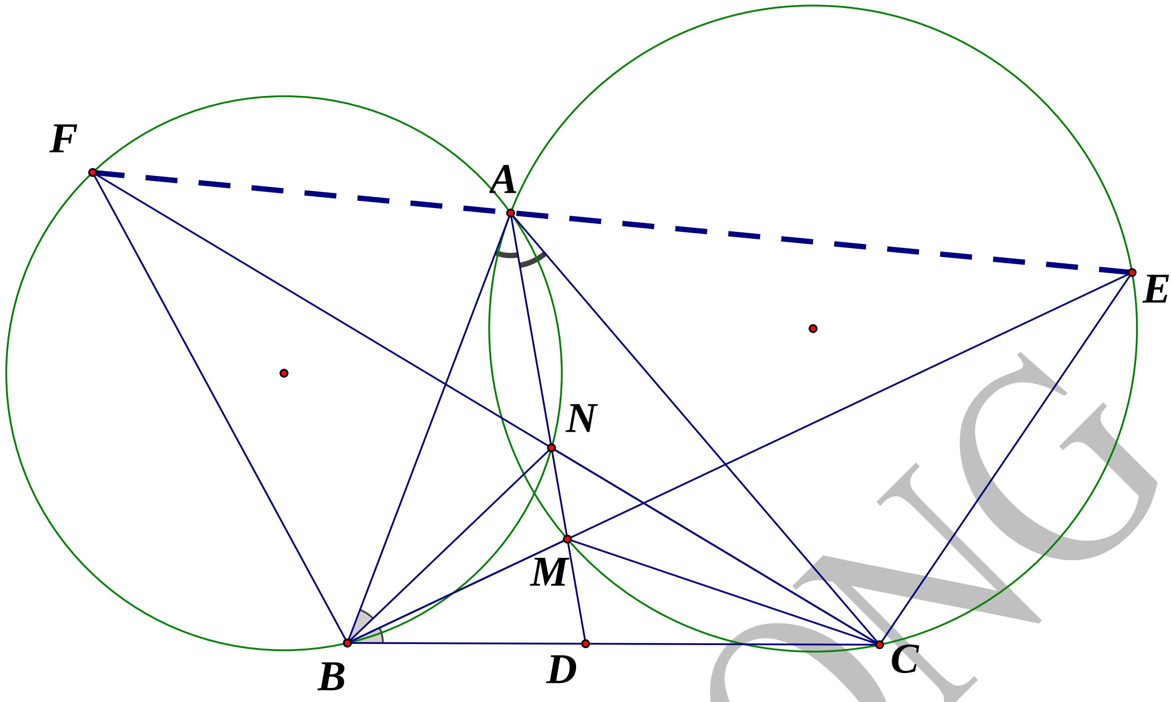
Mặt khác, ta còn có $5(a+b)^2+ab\vdots 7\Rightarrow 5(a-b)^2+21ab\vdots 7\Rightarrow (a-b)^2\vdots 7$ (**vì** $21ab\vdots 7$)

$\Rightarrow 5(a-b)^2\vdots 49$. **Mà** $5(a-b)^2+21ab\vdots 49$ **nên** $21ab\vdots 49\Rightarrow ab\vdots 7$

Ta có: $a-b\vdots 7$ **và** $ab\vdots 7\Rightarrow a\vdots 7$ **và** $b\vdots 7\Rightarrow ab\vdots 49$

Ta có: $ab\vdots 9$, $ab\vdots 49$, **ƯCLN**$(9,49)=441$. **Do đó ab chia hết cho 441.**

<u>Bài 6:</u> (4 điểm) **Gọi AD là đương phân giác trong góc A của** ΔABC **(D thuộc đoạn BC). Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N sao cho** $ABN=CBM$. **BM cắt đường tròn ngoại tiếp** ΔACM **tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp** ΔABN **tại điểm thứ hai F.**



a) Chứng minh: BCEF là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} BFC = BAD \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn BN của (ABN))} \\ BEC = CAD \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn CN của (ABN))} \\ BAD = CAD \text{ (AD là đường phân giác của } \Delta ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow BFC = BEC \Rightarrow$ tứ giác BCEF nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới 2 góc bằng nhau

b) Chứng minh ba điểm: A, E, F thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} CFE = CBE \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn CE của (BCEF))} \\ ABN = CBE \text{ (vì } ABN = CBM) \end{cases}$

$\Rightarrow CFE = ABN$ mà $ABN = CFA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AN của (ABN))

nên $CFE = CFA \Rightarrow$ tia $FE \equiv$ tia $FA \Rightarrow$ A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $BCF = ACM$. Từ đó suy ra $ACN = BCM$

Tacó: $\begin{cases} BCF = BEF \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn BF của (BCEF))} \\ ACM = BEF \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn AM của (ACM))} \end{cases}$

$\Rightarrow BCF = ACM \Rightarrow BCM + MCN = ACN + MCN \Rightarrow BCM = ACN$

★ HẾT ★